FRACTALS

της Χ. Μητσακάκη*

1. Ποια γεωμετρία;

Η έμφυτη και αρχέγονη παρόρμηση της ανθρωπότητας να προσπαθεί να κατανοήσει τη φύση, να ερμηνεύσει τους νόμους που κρύβονται πίσω από την πολυπλοκότητα του σύμπαντος, βρήκε από τα πολύ παλιά χρόνια έναν πολύτιμο βοηθό, τη γεωμετρία. Και αν ακόμα και σήμερα η μια θεωρία εκτοπίζει την άλλη, υπάρχει κάτι που μένει αναλλοίωτο στον χρόνο, η σπουδαιότητα των μαθηματικών. Οι νόμοι της φύσης είναι μαθηματικοί. *Αεί ο θεός ο μέγας γεωμετρεί,* λοιπόν.

Ποιά είναι η γεωμετρία της φύσης, όμως; Μήπως είναι η θεώρηση και αισθητική των αρχαίων ελλήνων φιλοσόφων, οι έννοιες και οι ιδανικές φόρμες των Πλατωνικών σχημάτων και των Ευκλείδειων μορφών; Ακόμα και σήμερα η ανθρωπότητα δέχεται ως προφανές ότι η μουσική και η τέχνη πρέπει να βασίζονται σε θεμελιώδεις συμμετρίες, ενώ η προσέγγιση της φύσης γίνεται με σχήματα απλά, Ευκλείδεια, όπως γραμμές, τρίγωνα, κύκλοι, ορθογώνια. Η φύση, όμως, αποτελείται από ζωντανά συστήματα με περίπλοκη τάξη, που αέναα εξελίσσονται, αναπτύσσονται και παρακμάζουν. Πώς μπορεί αυτή η ασταθής πολυπλοκότητα ν' αντιμετωπιστεί από τις στατικές και περιορισμένες Πλατωνικές και Ευκλείδειες ιδέες;

«...Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι παραλίες δεν είναι κύκλοι, ο φλοιός δεν είναι λείος, ούτε οι κεραυνοί ταξιδεύουν ευθύγραμμα...» Η πασίγνωστη πια σήμερα φράση του Benoit Mandelbrot περιγράφει με τον καλύτερο τρόπο τη νέα γεωμετρία, αυτή που αντικατοπτρίζει ένα σύμπαν αναδιπλούμενο, όχι ομαλό, τραχύ, όχι λείο. Είναι η γεωμετρία μιας πολύπλοκης φύσης γεμάτης στροβίλους, κοιλώματα, τεμαχισμένης και συστρεμμένης, δεμένης κόμπο και μπλεγμένης. Χρειαζόταν, όμως, η διαισθητική σκέψη του Mandelbrot για να φανεί ότι η πολυπλοκότητα της φύσης δεν είναι κάτι τυχαίο ή απρόβλεπτο. Αντίθετα, είναι συχνά η αιτία για τη δημιουργία.

Ο Mandelbrot βρήκε τον δρόμο για να διατυπώσει την, πασίγνωστη πια, θεωρία του της Κλασματικής γεωμετρίας, δουλεύοντας πάνω σε φαινομενικά ετερόκλιτα προβλήματα: συγκεντρώσεις λαθών στη μετάδοση πληροφορίας μέσω τηλεφωνικών γραμμών, τη στάθμη των νερών του Νείλου, τη διεθνή διακύμανση των τιμών του μπαμπακιού, τον στροβιλισμό, τα γαλαξιακά σμήνη... Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, άρχισε να συνειδητοποιεί ότι όλα αυτά τα θέματα είχαν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό: σχετίζονταν όλα με τη γεωμετρική δομή μη κανονικών φαινομένων.

Διατύπωσε τις αρχές μιας νέας γεωμετρίας που δεν έμοιαζε με καμιά απ' όσες είχαν προηγηθεί. Ο Mandelbrot διάλεξε τον όρο fractal (λατινικά fractua) που σημαίνει ακανόνιστο, αλλά η λέξη υπονοεί και την έννοια κλασματικός (fractional) ή τεμαχισμένος (fragmented). Η πιο πρόσφατη έκδοση του βιβλίου του «Μια Κλασματική γεωμετρία της φύσης» (1982), έχει γίνει πια best seller. Ο μεγάλος θεωρητικός φυσικός John Wheeler έχει πει ότι: «... όποιος δεν θα είναι στο μέλλον εξοικειωμένος με τα fractals, θα θεωρείται επιστημονικά αναλφάβητος...».

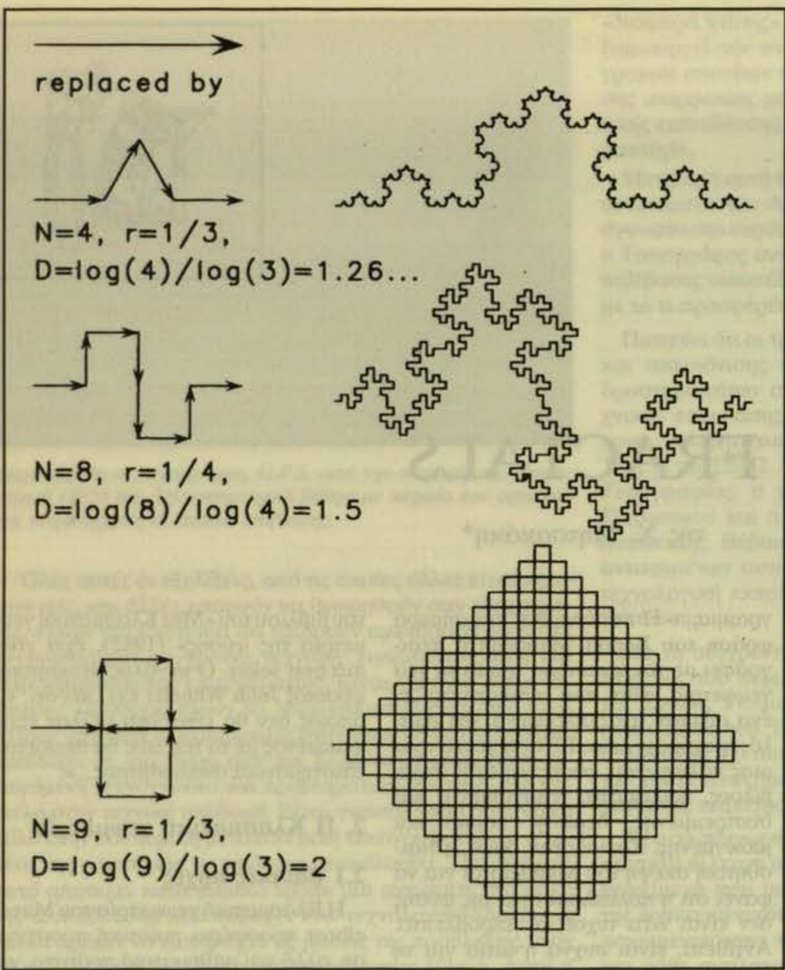
2. Η Κλασματική γεωμετρία

2.1 Βασικές αρχές

Η Κλασματική γεωμετρία του Mandelbrot προσφέρει ποιοτική προσέγγιση, αλλά και μαθηματικό πρότυπο, για να περιγραφούν φυσικά φαινόμενα που παρουσιάζουν πολύπλοκη μορφή. Σχήματα όπως ακτογραμμές, βουνά, δένδρα, σύννεφα, παρουσιάζουν πολυπλοκότητα που δεν αποδίδεται με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Εκείνο, όμως, που διαθέτουν πολύ συχνά, είναι μια αδρανειακή συμπεριφορά, όταν υφίστανται επαναληπτικές μεγεθύνσεις. Αυτή η ιδιότητα πολλών φυσικών αντικειμένων, σύμφωνα με την οποία υποσύνολα του αντικειμένου που έχουν μεγεθυνθεί, μοιάζουν (ή είναι ταυτόσημα) μεταξύ τους, αλλά και με το συνολικό αντικείμενο, είναι γνωστή σαν **αυτο-ομοιότητα** (self-similarity), δηλαδή ανεξαρτησία από την κλίμακα. Σήμερα, όλο και περισσότεροι επιστήμονες πιστεύουν ότι η φύση λειτουργεί συγχρόνως σε όλες τις κλίμακες, δηλαδή ολιστικά.

Όμως, ο Mandelbrot, ήταν αυτός που, ασχολούμενος με τα φαινομενικά ασύνδετα μεταξύ τους θέματα που αναφέραμε πορηγουμένως, διαπίστωσε

(*) Η Χ. Μητσακάκη είναι λέκτορας στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Ε.Μ.Π.



Σχ. 1: Επαναληπτική διαδικασία για τη δημιουργία της καμπύλης του von Koch και παραλλαγές της με διαφορετικές κλασματικές διαστάσεις.

αυτή την ιδιότητα στη φύση. Συνειδητοποίησε ότι οι νόμοι που διέπουν αυτά τα φυσικά φαινόμενα, θα πρέπει να έχουν ελάχιστα κοινά με την κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία, όπου η έννοια της κλίμακας είναι τόσο προφανής, που σχεδόν δεν έχει σημασία. Διαπιστώνοντας, λοιπόν, ότι η φύση είναι ακανόνιστη, αλλά οργανωμένη μέσα από την αυτο-ομοιότητα, ανέσυρε από την «γαλαρία των τεράτων», όπως την είχε ονομάσει ο μεγάλος Poincaré, κάποιες παράξενες μαθηματικές συναρτήσεις, που είδαν το φως προς τα τέλη του 19ου αιώνα. Οι μαθηματικοί που τις δημιούργησαν, αφού συγχάρηκαν τον εαυτό τους που ξεπέρασε τη φύση σε δημιουργικότητα, τις λησμόνησαν. Ο Mandelbrot, όμως, είχε ένα πολύ ισχυρό όπλο στα χέρια του, τα γραφικά ενός Η/Υ. Μπορούσε, λοιπόν, ν' ανιχνεύσει αν αυτές οι μαθηματικές παραδοξότητες ήταν κλειδιά για την κατανόηση της πολυπλοκότητας της φύσης, όπως του έλεγε η διαίσθησή του.

Το 1872, ο μαθηματικός K. Weierstrass προκάλεσε μια μικρή κρίση στα μαθηματικά περιγράφοντας μια καμπύλη που ήταν συνεχής, αλλά τόσο πολύπλοκη, που δεν ήταν πουθενά παραγωγίσιμη. Κι όμως, ο απειροστικός λογισμός του Νεύτωνος, επέτρεπε την άνετη παραγώγιση καμπυλών, συναρτήσεων και των κλίσεών τους. Οι μαθηματικοί χρειάστηκαν 50 χρόνια για να παραδεχθούν την ύπαρξη τέτοιων καμπυλών. Άλλη λαχτάρα περίμενε τους μαθηματικούς του 1890, όταν ο G. Peano ανακάλυψε την «καμπύλη που γεμίζει τον χώρο». Οι μαθηματικοί θεωρούσαν δεδομένο από την κοινή, Ευκλείδεια όμως, λογική, ότι μια καμπύλη, ανεξάρτητα του πόσο κάμπτεται, πρέπει να είναι μονοδιάστατη, αφού η γενέτειρά της είναι η γραμμή. Κι όμως, ο Peano δημιούργησε μια καμπύλη που συστρεφόταν τόσο πολύπλοκα, που γέμιζε όλο το επίπεδο του χαρτιού όπου σχεδιαζόταν. Μετά 70 χρόνια ο Mandelbrot απέδειξε πειστικότατα ότι αυτές, και άλλες, καμπύλες-τέρατα, κάθε άλλο παρά άσχετες με τη γεωμετρία της φύσης είναι. Αυτές κρατούν το μυστικό των κλασματικών μορφών, των μορφών που κυριαρχούν στην φύση.

Τί είναι, όμως, fractal και σε τί διαφέρει από τις Ευκλείδειες μορφές; Ο Πίνακας 1 δείχνει τις βασικές διαφορές ανάμεσά τους.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μαθηματική γλώσσα για την περιγραφή, συσχέτιση και διαχείριση μορφών.

Ευκλείδεια	Κλασματική
• παραδοσιακή (>2.000 χρόνια)	• Σύγχρονη (~10 χρόνια)
• βασιζόμενη σε χαρακτηριστική κλίμακα ή μέγεθος	• χωρίς συγκεκριμένη κλίμακα ή μέγεθος
• κατάλληλη για ανθρώπινες κατασκευές	• κατάλληλη για φυσικές μορφές
• περιγράφεται με εξισώσεις	• αλγόριθμοι επανάληψης (ανατροφοδότησης)

Ας δούμε, όμως, πώς γεννιέται ένα μαθηματικό fractal, για να καταλάβουμε αυτές τις διαφορές καλύτερα. Η καμπύλη που κατασκεύασε ο H. von Koch το 1904, και είναι γνωστή σαν «νησί ή χιονονιφάδα» του Koch, φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Η επαναληπτική διαδικασία, όπου κάθε τμήμα διαιρείται σε τρίτα και το μεσαίο τμήμα αντικαθίσταται από δύο ίσα τμήματα ενός ισόπλευρου τριγώνου, είναι εμφανής και μπορεί να επαναλαμβάνεται ad infinitum σε όλο και μικρότερες κλίμακες.

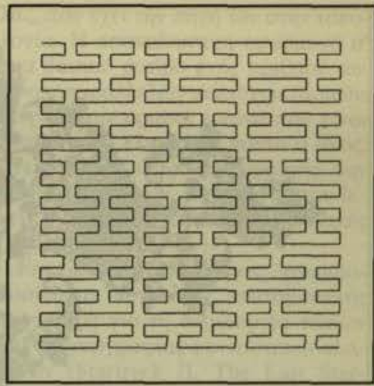
Αυτή η καμπύλη δείχνει ότι η επανάληψη ενός πολύ απλού κανόνα, γεννά ένα ιδιαίτερα περίπλοκο σχήμα με ασυνήθιστες ιδιότητες. Σε αντίθεση με τα Ευκλείδεια σχήματα, που χάνουν την δομή τους όταν μεγεθύνονται, αυτή η καμπύλη παρουσιάζει λεπτομέρειες σ' όλες τις κλίμακες. Το σημαντικότερο, όμως, είναι ότι λόγω της κατασκευής της, διαθέτει αυστηρά μαθηματική αυτο-ομοιότητα. Κάθε τμήμα της καμπύλης, όταν μεγεθυνθεί, μπορεί να υποκαταστήσει ένα μεγαλύτερο τμήμα. Σε κάθε στάδιο το μήκος της καμπύλης αυτής αυξάνεται κατά 4/3. Έτσι, στο όριο, η καμπύλη συμπιέζει ένα άπειρο μήκος σε μια πεπερασμένη επιφάνεια του επιπέδου, χωρίς ποτέ να τέμνει τον εαυτό της!

Στο συνταρακτικό, όμως, αυτό συμπέρασμα κατέληξε ο Mandelbrot και όταν αναρωτήθηκε για το μήκος της ακτογραμμής της Μ. Βρετανίας. Οι παράκτιες γραμμές είναι φυσικά **κλασματικά σύνολα** (fractal sets) και η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας στην περίπτωσή τους είναι σαφώς στατιστική - η μέση αναλογία στην μορφή των όρμων και των ακρωτηρίων δεν μεταβάλλεται σε αλλαγές της κλίμακας (μεγεθύνσεις), αν και η ακριβής διάταξή τους μπορεί να διαφέρει.

Η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας, ή ανεξαρτησίας από την κλίμακα, συνδέεται στενά με την αντίληψη που έχουμε για τις διαστάσεις /1/. Ένα αντικείμενο, που θεωρείται μονοδιάστατο με τις συμβατικές αντιλήψεις, όπως ένα ευθύγραμμο τμήμα, μπορεί να διαιρεθεί σε Ν ολόιδια τμήματα, όπου το κάθε τμήμα, προκύπτει μέσω μια σμίκρυνσης με λόγο $r = 1/N$ από το σύνολο (Σχήμα 2) /1/. Ανάλογα, για ένα διδιάστατο αντικείμενο ο λόγος θα είναι $r = 1/(N)^{0.5}$. Τέλος, ένα τριδιάστατο αντικείμενο μπορεί να διαιρεθεί σε Ν αυτο-όμοια τμήματα, όπου το καθένα προκύπτει από σμίκρυνση με λόγο $r = 1/(N)^{1/3}$. Χάρις στην ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας, η γενίκευση σε κλασματική διάσταση D είναι εύκολη. Ένα αυτο-όμοιο D-διάστατο αντικείμενο, μπορεί να διαιρεθεί σε Ν μικρότερα μη επικαλυπτόμενα όμοια προς αυτό τμήματα, όπου το κάθε τμήμα προκύπτει από σμίκρυνση με λόγο ομοιότητας r(N) όπου:

$$r = 1/(N)^{1/D} \text{ ή } N = r^{-D}$$

Αντίστροφα, από την σχέση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί η κλασματική



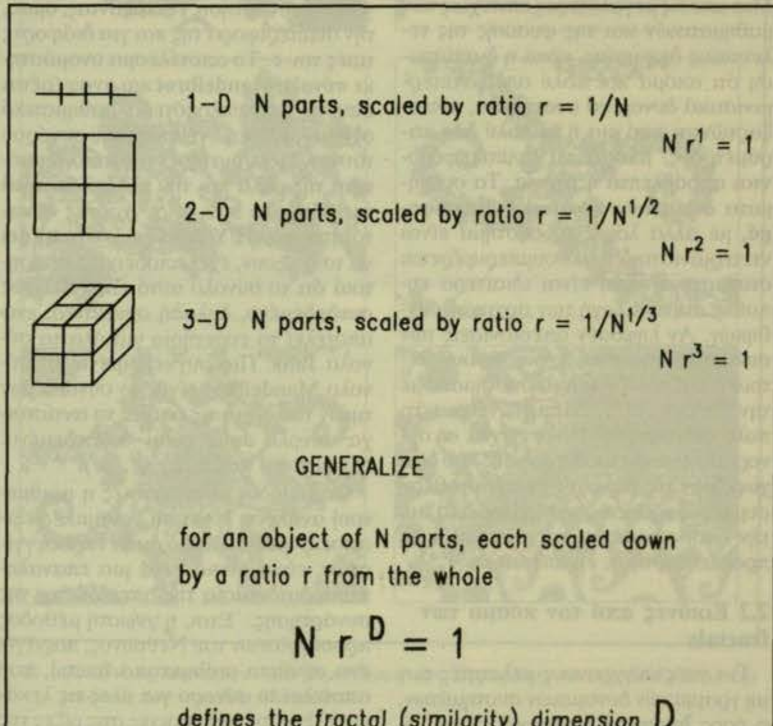
Σχ. 3: *Η καμπύλη που γεμίζει το επίπεδο του Peano.*

διάσταση D για ένα αυτο-όμοιο κλασματικό σύνολο σαν:

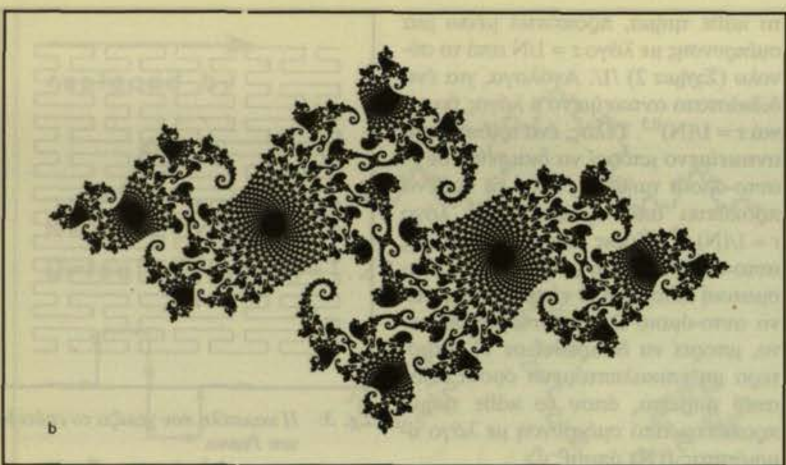
$$D = \log(N)/\log[1/r(N)] \quad (1)$$

Είναι φανερό ότι ο αριθμός Ν εξαρτάται από τον λόγο ομοιότητας. Για την περίπτωση της καμπύλης του von Koch (Σχήμα 1) έχουμε $N = 4$ τμήματα, ενώ το καθένα προκύπτει από σμίκρυνση του αρχικού με λόγο 1/3. Η κλασματική διάσταση της καμπύλης είναι $D = \log(4)/\log(3) = 1.26$. Αυτή η μη ακέραια διάσταση, μεγαλύτερη της μονάδας αλλά μικρότερη του δύο, αντανακλά τις ασυνήθιστες ιδιότητες της καμπύλης, η οποία «γεμίζει» πολύ περισσότερο χώρο από μια τοπολογική γραμμή ($D_T = 1$), αλλά βέβαια λιγότερο από την Ευκλείδεια επιφάνεια του επιπέδου ($D_E = 2$). Έτσι, η κλασματική διάσταση μπορεί να περιγράψει την τραχύτητα ενός φαινομένου ή, ισοδύναμα, το βαθμό που η προβολή του φαινομένου πληρεί τον Ευκλείδειο χώρο R^E. Η περίφημη καμπύλη του Peano, που πληρεί τον R^2 Ευκλείδειο χώρο του επιπέδου, έχει οριακή κλασματική τιμή $D \rightarrow 2$ (Σχήμα 3) /2/. Όλες, όμως, αυτές οι καμπύλες διατηρούν την τοπολογική τους διάσταση $D_T = 1$, δηλαδή αν ένα σημείο τους αφαιρεθεί, η καμπύλη κόβεται σε δύο τμήματα.

Η αντίληψη της κλασματικής διάστασης βρίσκει, όμως, εφαρμογή και στα **στατιστικά αυτο-όμοια κλασματικά σύνολα**, που συναντάμε σε αφθονία στη φύση. Έτσι, οι πραγματικές ακτογραμμές παρουσιάζουν κλασματική διάσταση D μεταξύ 1.15 - 1.25, έχουν, δηλαδή, τραχύτητα ανάλογη με την καμπύλη του Koch, που είναι μια απλοϊκή προσέγγιση της φυσικής ακτογραμμής. Η στατιστική ομοιότητα της ακτογραμμής υποδηλώνει, ότι σε αντίθεση με την ντετερμινιστική καμπύλη του Koch, η εικόνα της σε μια συγκεκριμένη κλί-



Σχ. 2: *Παρουσίαση των τυπικών Ευκλείδειων διαστάσεων κάτω από την αντίληψη της αυτο-ομοιότητας και γενίκευση στην μη-ακέραια τιμή της κλασματικής διάστασης D.*



Σχ. 4: Σύνολο Julia.

μακα, δεν επαρκεί για να προβλεφθούν οι ακριβείς λεπτομέρειες της ακτής σε μια μεγέθυνση της κλίμακας. Ωστόσο, ο τρόπος που μεταβάλλονται οι λεπτομέρειες καθώς αλλάζει η κλίμακα, χαρακτηρίζεται και πάλι από την κλασματική διάσταση D.

Η παρουσία των κλασματικών συνόλων στη φύση δεν είναι τυχαία, γι' αυτό και η παραστατική δύναμη των fractals μέσω Η/Υ στις απομιμήσεις των φυσικών φαινομένων, όπως ακτών, βουνών, φυτών, μουσικής και τοπίων, είναι εντυπωσιακή. Αυτό, όμως, δεν θα πρέπει να θεωρείται περίεργο, αν σκεφθεί κανείς ότι και οι απλούστερες μαθηματικές συναρτήσεις, όταν ερμηνεύονται σαν εκφράσεις δυναμικών συστημάτων, παράγουν fractals.

Βασικά, με τον όρο δυναμικό σύστημα εννοούμε κάθε διαδικασία που εξελίσσεται με τον χρόνο. Τέτοια συστήματα είναι παρόντα σε κάθε εκδήλωση αυτής της ίδιας της ζωής και, βέβαια, συναντώνται σ' όλες τις επιστήμες. Ο καιρός αποτελεί ένα περίπλοκο δυναμικό σύστημα, όπου θερμοκρασία, βαρομετρική πίεση, διεύθυνση και ταχύτητα του ανέμου, υγρασία κ.ά., είναι παράμετροι του συστήματος που μεταβάλλονται συνεχώς με τον χρόνο. Αλλά και η οικονομία ή φαινόμενα της βιολογίας, είναι δυναμικά συστήματα. Η εξέλιξη του πλανητικού μας συστήματος και πολλές χημικές αντιδράσεις, η ροή του νερού και ο καπνός του τσιγάρου, είναι δυναμικά συστήματα.

Η μελέτη των δυναμικών συστημάτων επιδιώκει, όταν είναι γνωστές οι λεπτομέρειες του παρελθόντος, να προβλέψει ή να συναγάγει την μακροπρόθεσμη ή ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος. Σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό είναι δυνατό. Ο ήλιος θα ανατείλει και αύριο. Η χημική αντίδραση που συμβαίνει όταν ρίχνουμε γάλα στον καφέ μας είναι προβλέψιμη. Μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες των μαθηματικών και της φυσικής της τελευταίας δεκαετίας, είναι η διαπίστωση ότι ακόμα και πολύ απλά ντετερμινιστικά δυναμικά συστήματα, που εξαρτώνται από μια ή το πολύ δύο παραμέτρους, μπορεί να συμπεριφέρονται απρόβλεπτα ή τυχαία. Τα συστήματα διαθέτουν **χαοτική συμπεριφορά,** με άλλα λόγια το σύστημα είναι ντετερμινιστικό αλλά συμπεριφέρεται στοχαστικά, γιατί είναι ιδιαίτερα ευπαθές στην επιλογή των αρχικών συνθηκών. Αν ληφθούν απεικονίσεις των συναρτήσεων, που περιγράφουν τέτοια απλά αλλά χαοτικά συστήματα με την βοήθεια Η/Υ, διαπιστώνεται κάτι πολύ ενδιαφέρον. Πολύ συχνά οι συνοριακές γεωμετρικές μορφές που διαχωρίζουν τις περιοχές με την σταθερή συμπεριφορά του συστήματος από αυτήν όπου κυριαρχεί το χάος και η μη προβλεψιμότητα, είναι fractals /1,3/.

2.2 Εικόνες από τον κόσμο των fractals

Για τους σύγχρονους μελετητές των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, ο όρος **διακριτή δυναμική** φέρνει αμέσως στη σκέψη την απεικόνιση μαθηματικών συναρτήσεων, συχνά πολύ απλών, με επαναλήψεις. Αλλά και τα fractals γεννιώνται με την ίδια διαδικασία. Έτσι, περί το 1980, ο Mandelbrot, δοκίμασε την αυτο-όμοια επαναληπτική νέα γεωμετρία του στον κόσμο των καθαρών μαθηματικών. Στην κίνηση αυτή τον ώθησε και η γνώση του για την πρωτοποριακή, για τις αρχές του αιώνα, εργασία δύο γάλλων μαθηματικών, των Julia και Fatou, στη θεωρία των μιγαδικών απεικονίσεων. Αυτοί χρησιμοποίησαν πολύ απλές μιγαδικές συναρτήσεις, όπως η:

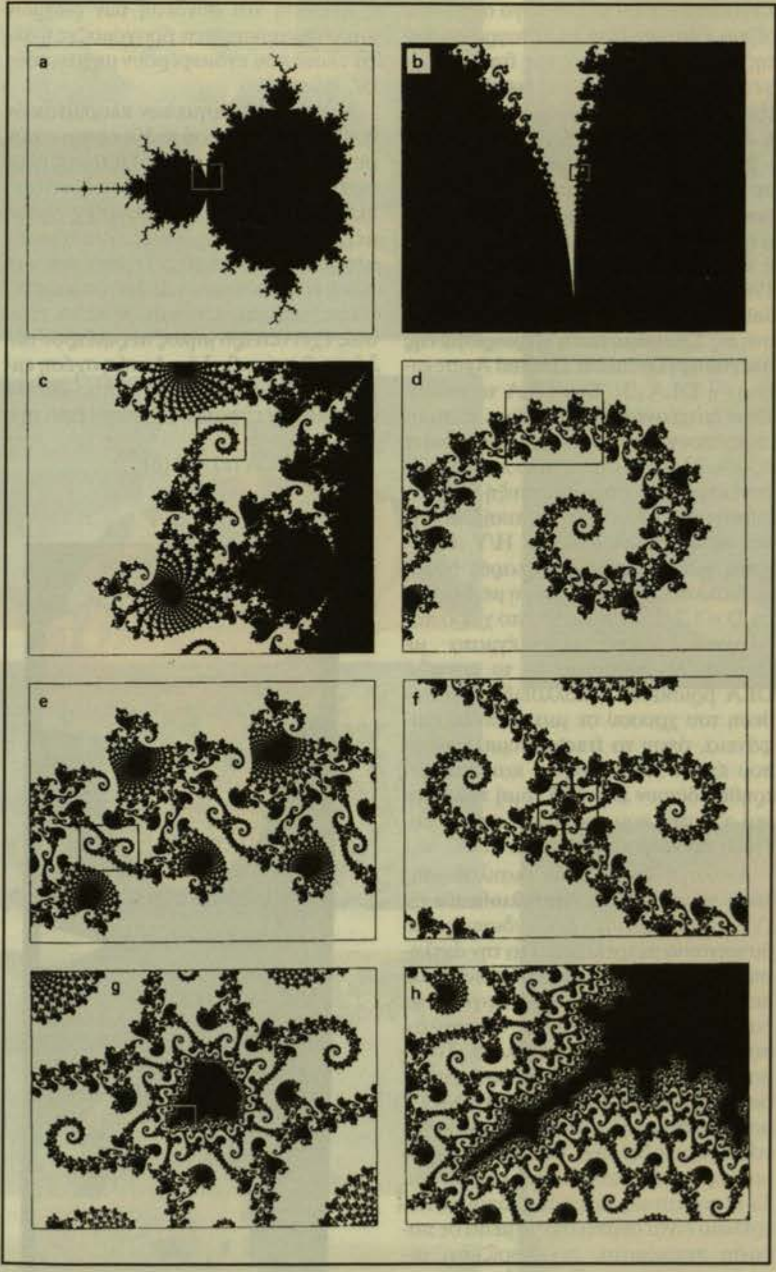
$f_c(z)z^2 + c$ με $z,c \in$ και c: σταθερά

και εξέτασαν τι συμβαίνει όταν, με μια τυχαία αρχική τιμή του z, εφαρμόζεται η επαναληπτική διαδικασία στην απεικόνιση. Κάποιες αρχικές τιμές του z ξεφεύγουν γρήγορα προς το άπειρο, ενώ άλλες όχι. Το σημειοσύνολο των τιμών του z που διαφεύγουν προς το άπειρο, αποτελεί τη λεγόμενη **λεκάνη έλξης** και είναι γνωστό σαν **πλήρες σύνολο Julia.** Τα σύνολα αυτά έχουν εμφανέστατα κλασματικό χαρακτήρα με παρούσα την αυτο-ομοιότητα, ενώ αποτελούν εικόνες εκπληκτικής ομορφιάς αλλά και πολυπλοκότητας. Άλλα από αυτά είναι συνεκτικά σύνολα, δηλαδή ενιαία, και άλλα αποτελούνται από περισσότερα τμήματα.

Ο Mandelbrot μελέτησε την ίδια μιγαδική συνάρτηση, εξετάζοντας, όμως, την συμπεριφορά της και για διάφορες τιμές του c. Το αποτέλεσμα ονομάστηκε **σύνολο Mandelbrot** και αναφέρεται σαν το «πολυπλοκότερο μαθηματικό σχήμα». Κάθε μεγέθυνση του συνόρου του συνόλου, διατηρεί την αυτο-ομοιότητα της αλλά και την πολυπλοκότητά της. Παρόλο που οι σύγχρονες δυνατότητες των Η/Υ δεν έχουν καταφέρει να το δείξουν, έχει αποδειχθεί θεωρητικά ότι το σύνολο αυτό είναι πλήρως συνδεδεμένο, δηλαδή συνεκτικό, ενώ αποτελεί το ευρετήριο για όλα τα σύνολα Julia. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο Mandelbrot είναι το σύνολο των τιμών του c, για τις οποίες τα αντίστοιχα σύνολα Julia είναι συνδεδεμένα. (Σχήματα 4 και 5 /1/, /2/, /4/).

Οι μέθοδοι με τις οποίες η αριθμητική ανάλυση λύνει μη γραμμικές εξισώσεις μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων, είναι ουσιαστικά μια επαναληπτική διαδικασία της απεικόνισης της συνάρτησης. Έτσι, η γνωστή μέθοδος προσεγγίσεων του Νεύτωνος, παράγει ένα σύνθετο μαθηματικό fractal, που αποτελεί το σύνορο για όλες τις λεκάνες έλξης, τις αντίστοιχες στις ρίζες της συνάρτησης.

Ένα από τα πρώτα πεδία «εφαρμογών» της Κλασματικής γεωμετρίας είναι οι «κλασματικές απομιμήσεις» της φύσης μέσω των γραφικών των σύγχρονων Η/Υ. Τα fractals και οι υπολογιστές έχουν μια στενή σχέση. Μια από τις ισχυρότερες τεχνικές στον προγραμματισμό είναι ο **βρόχος αναδράσεων** (ή επαναλήψεων), όπου μια διαδικασία αναλύεται σε μια ακολουθία επαναλήψεων του εαυτού της. Ανάλο-



Σχ. 5: Το σύνολο Mandelbrot και μεγεθύνσεις του. Συγκρίνετε το σύνολο Julia με την εικόνα e του συνόλου Mandelbrot.

γα, και οι κλασματικές μορφές αναλύονται σε μέρη του εαυτού τους σε διάφορες κλίμακες.

Για να προκύψουν, όμως, ρεαλιστικές απομιμήσεις της φύσης, συνδυάζονται οι μαθηματικές απεικονίσεις που εξασφαλίζουν την ανεξαρτησία κλίμακας με κάποιες τυχαίες επιλογές. Τα αποτελέσματα είναι στατιστικά αυτο-όμοια κλασματικά σύνολα - απομιμήσεις, τόσο πειστικές, που σχεδόν δεν διακρίνονται από την πραγματικότητα. Ο M. Barnsley και μια ομάδα επιστημόνων του Ινστιτούτου της Georgia των ΗΠΑ, συνδυάζει την τοπολογία και τα στατιστικά fractals. Η διαδικασία χρησιμοποιεί τους **αυτο-ομοπαράλληλους μετασχηματισμούς** (affine transformations), μια γενίκευση της αυτο-ομοιότητας όπου ο λόγος ομοιότητας δεν είναι ίδιος προς κάθε κατεύθυνση, σε συνδυασμό με το θεώρημα του κολάζ, που έχει την πηγή του στην τοπολογία. Η επαναληπτική εφαρμογή σ' ένα βασικό μοτίβο ενός αριθμού αυτο-ομοπαράλληλων μετασχηματισμών, οδηγεί στην οριακή εικόνα που είναι ένας **fractal ελκυστής,** πάντα ο ίδιος, ανεξαρτήτως σειράς εφαρμογής των μετασχηματισμών. Οι εικόνες που δίνει η μέθοδος είναι εντυπωσιακές (Σχήματα 6 και 7 /4/).

Fractal πλαστογραφήσεις χρησιμοποιήθηκαν σε ταινίες επιστημονικής φαντασίας για τη δημιουργία τοπίων και της γεωγραφίας φανταστικών πλανητών (Startreck II, The Last Starfighter), αλλά και για τη δημιουργία έργων τέχνης ή διαφημίσεων (Σχήμα 8, βήματα 1 έως 6 /1/).

Η επιτυχία των fractal πλαστογραφήσεων της φύσης δεν είναι τίποτα άλλο από μια ακόμα διαπίστωση της κλασματικής και περίπλοκης συμπεριφοράς της φύσης. Απ' ευθείας μετρήσεις και παρατηρήσεις σε πληθώρα φυσικών φαινομένων επιβεβαιώνουν αυτή τη διαπίστωση. Ο Mandelbrot πρότεινε και πολλοί αστροφυσικοί υιοθετούν την άποψη ότι η ίδια η δομή του σύμπαντος είναι **κλασματική, ή πιθανά πολυκλασματική** (multi-fractal).

Στη φυσική των επιφανειών συναντώνται πολλές κλασματικές δομές. Οι επιφάνειες είναι τα σύνορα μεταξύ ανταγωνιστικών δράσεων, γι' αυτό και η τοπογραφία τους είναι σημαντική σ' όλα τα είδη της επιστήμης. Έτσι, η επιφάνεια του ιού της πολυομυελίτιδας είναι κλασματικής δομής, ενώ καρκινικοί όγκοι δείχνουν να διαθέτουν κλασματική συμπεριφορά. Αλλά και οι επιφάνειες των πρωτεϊνών είναι κλασματικές. Η επιφάνεια του φλοιού του ανθρώπινου εγκεφάλου με τις πολλαπλές πτυχώσεις, σε αντίθεση με τον λείο φλοιό των μικρών θηλαστικών, δείχνει να παρουσιάζει συστηματική κλασματική διάσταση $D = 2.73 - 2.79$. Τα ρινικά οστά πολλών ζώων μεγιστοποιούν τις οσφρητικές δυνατότητές τους, αναπτύσσοντας μέγιστη επιφάνεια σε μικρό όγκο, δηλαδή διαμορφώνοντας fractal δομή με σταθερή D.

Το ανθρώπινο κυκλοφοριακό σύστημα (αρτηρίες-φλέβες) πρέπει να έχει τέτοια κατανομή μέσα στο σώμα, ώστε κανένα όργανο ή μέρος του ιστού να μη βρίσκεται μακριά από το ένα ή το άλλο σύστημα. Αυτό υπαγορεύει fractal δομή διακλαδώσεων για τις φλέβες και τις αρτηρίες. Ο όγκος, όμως, του αίματος είναι πολύ μικρός, μόλις το 3% του σώματος. Για να πλησιάζει το κυκλοφοριακό σύστημα σε απειροστή απόσταση από κάθε μέρος του σώματος και να διατηρείται συγ-

Σχ. 6: Βασικό μοτίβο και πίνακας με ηλιοτρόπια από fraktal απομιμήσεις.

χρόνως ο μικρός όγκος του αίματος, η φύση διάλεξε μια διαδικασία διακλάδωσης, ταχύτερη αυτής που θα προέκυπτε από μια απλή σταθερότητα κλίμακας. Φαίνεται ότι η κλασματική διάσταση του κυκλοφοριακού συστήματος είναι $D \rightarrow 3$. Αλλά και ο πνεύμονας έχει μια ιδιαίτερα διαφωτιστική για τους επιστήμονες κλασματική δομή. Συγκεκριμένα, έχει διαπιστωθεί ότι διαθέτει ποικιλία κλιμάκων, ώστε να επιτυγχάνεται η αποδοτικότερη λειτουργία του.

Η διαδικασία των διακλαδώσεων στα φυσικά συστήματα δείχνει να αποτελείται από μια σειρά βημάτων, όπου κάθε διακλάδωση είναι σημείο απόφασης. Σ' αυτά τα σημεία απόφασης, υπάρχει η δυνατότητα ή να πραγματοποιηθεί μια στοχαστική επιλογή μεταξύ διαφόρων εναλλακτικών μορφών επανάληψης ή να διατηρηθεί η ίδια διαδικασία επανάληψης για αρκετές κλίμακες μήκους και μετά να αλλάξει ξαφνικά. Για τον λόγο αυτό, και οι πιο επιτυχημένες πλαστογραφήσεις της φύσης είναι οι τυχαίες fractal μορφές, όπου στο σημείο **διακλάδωσης** (bifurcation) - απόφασης προβλέπεται η στοχαστική επιλογή.

Χημικές διεργασίες που καταλήγουν σε χαλαρές μορφές συσσωμάτωσης, όπως η αιθάλη από σωματίδια άνθρακα, η ηλεκτρολυτική εναπόθεση μετάλλων ή η οξείδωση, προτυποποιήθηκαν το 1983 από τους T.A. Witten και L. Sauder σ' ένα μοντέλο που έγινε γνωστό ως **Συσσωμάτωση Περιορισμένης Διάχυσης** (Diffusion Limited Aggregation) ή DLA /5/. Στα DLA τα σωματίδια διαχέονται τυχαία μέχρι να προσκρούσουν στο συσσωμάτωμα, οπότε προσκολλώνται στο σημείο πτώσης και συνεισφέρουν στην ανάπτυξή του. Τα συστήματα είναι κλασματικής δομής και οι προσομοιώσεις σε Η/Υ παράγουν, για το επίπεδο, χαλαρές δομές με διακλαδώσεις σαν φτέρη με διάσταση $D = 1.7$. Στον τριδιάστατο χώρο παράγονται fractal συμπλέγματα με $D \sim 2.5$. Σε συμφωνία με το μοντέλο DLA βρίσκεται η κολλοειδής εναπόθεση του χρυσού σε μια επίπεδη επιφάνεια, όπου τα fractal συμπλέγματα που έχουν παρατηρηθεί και καταμετρηθεί, δίνουν $D \sim 1.75$, τιμή πολύ κοντά σ' αυτήν που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης με Η/Υ.

Ανάλογη διαδικασία διακλάδωσης είναι και η **ιξώδης δακτυλιοθεσία** /5/ (Viscous Fingering), που ενδιαφέρει τη βιομηχανία πετρελαίου. Για την άντλησή του ρίχνεται νερό υπό πίεση στις πετρελαιοπηγές. Το νερό αρχίζει να διαχέεται παρουσιάζοντας «δάκτυλα» που διεισδύουν στο πετρέλαιο. Το αποτέλεσμα είναι μια επαναληπτική διακλαδιζόμενη ανάπτυξη με $D \sim 1.7$ πολύ κοντά στην τιμή του DLA, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι δύο διαδικασίες έχουν μαθηματική συγγένεια. Σε πραγματικές μετρήσεις, όπου το πετρέλαιο είναι συμπιεσμένο μέσα σε πορώδη πετρώματα, προσδιορίζεται μικρότερη διάσταση $D \sim 1.62$.

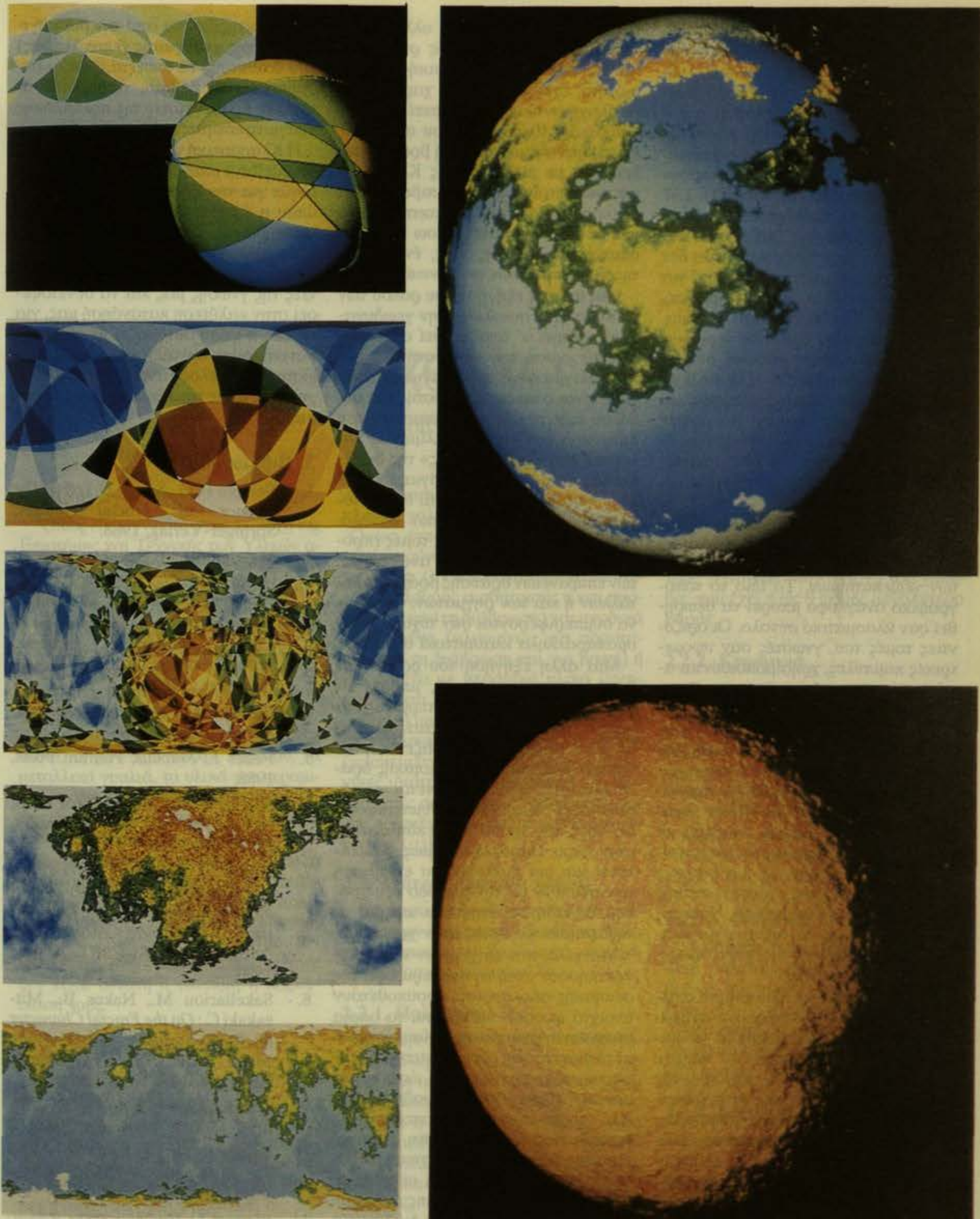
Διαδικασία διακλάδωσης είναι και η **διαπότιση** (Percolation), που μοιάζει έντονα με την DLA, αλλά έχει μια βασική διαφορά. Στην διαπότιση υπάρχει ένα όριο κάτω από το οποίο η εξάπλωση του φαινομένου περιορίζεται σε πεπερασμένη έκταση, σε αντίθεση με την DLA, όπου ένα διαχεόμενο σωματίδιο μπορεί να βρεθεί σ' οποιαδήποτε θέση στο μέσον.

Οι αρχές της διαπότισης εφαρμόζονται σε μια ποικιλία διεργασιών στη φύση, όπως η διήθηση του νερού στις ρωγμές των βράχων, αλλά και η ίδια η διάδοση και σύνδεση των ρωγμών και ρηγματώσεων σε βραχόμαζες ή άλλα υλικά που ενδιαφέρουν μηχανικούς /5/, /6/.

Μια άλλη ιδιότητα των κλασματικών δομών βρίσκει ευρύ πεδίο εφαρμογών σε φυσικά προβλήματα. Οι τομές κλασματικών συνόλων με το οριζόντιο επίπεδο, δημιουργούν κλειστές γραμμές, που βεβαίως είναι αυτο-όμοιες κλασματικές γραμμές. Το νησί του von Koch είναι μαθηματικό δείγμα μιας τέτοιας γραμμής, η οποία, κατά τα γνωστά, έχει άπειρο μήκος περιμέτρου αλλά σταθερό εμβαδόν. Αυτή η σχέση εμβαδού-περιμέτρου για αυτο-όμοιες κλασματικές γραμμές, δίδεται από την:

$$A(e) \sim P(e)^{2/D}$$

Σχ. 7: Fractal απομιμήσεις: (α) Κορίτσι των Άνδεων, (β) Αρκτικός λύκος.



Σχ. 8: Δημιουργία ενός fractal πλανήτη με προσθήκη τυχαίων ρηγμάτων που εκτείνονται σ' όλη τη σφαίρα (βήματα 1-6). Σας θυμίζει τη γη;

όπου A: το εμβαδόν της γραμμής, P: η περίμετρος και e: το βήμα μέτρησης.

Εφαρμόζοντας αυτή τη μέθοδο ο S. Lovejoy ανέλυσε τα σύννεφα, χρησιμοποιώντας δορυφορικά στοιχεία του Geosat, και διαπίστωσε όχι μόνον ότι τα σύννεφα είναι τριδιάστατα κλασματικά σύνολα, αλλά και ότι διατηρούν την ίδια κλασματική διάσταση D = 1.37 της περιμέτρου, για περισσότερες από επτά τάξεις μεγέθους στο φάσμα κλιμάκων. Αυτό το γεγονός δείχνει ότι δεν υπάρχει χαρακτηριστική κλίμακα, για τα 1km μέχρι 10km της ατμόσφαιρας, όπου εμφανίζονται σύννεφα. Ακόμα, διαπίστωσε ότι τα όρια των περιοχών όπου βρέχει κάποια χρονική στιγμή, δείχνουν να είναι fractal. Η ίδια η βροχή πέφτει με ακανόνιστες εξάρσεις και οι μεταβολές της έντασης για μικρές ή μεγάλες χρονικές περιόδους είναι όμοιες, άρα φαίνεται ότι και η συμπεριφορά της βροχής με το χρόνο είναι κλασματική /5/.

Ένα πολύ σημαντικό πεδίο εφαρμογών της Κλασματικής γεωμετρίας, αφορά μελέτη φαινομένων του κλάδου των γεωεπιστημών. Το ίδιο το τοπογραφικό ανάγλυφο μπορεί να θεωρηθεί σαν κλασματικό σύνολο. Οι οριζόντιες τομές του, γνωστές σαν υψομετρικές καμπύλες, χρησιμοποιούνται από τους χαρτογράφους για την απεικόνισή του. Στην αυτόματη χαρτογραφία, όπου γίνεται ευρεία χρήση των γραφικών του Η/Υ, η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας των υψομετρικών καμπυλών, διευκολύνει ιδιαίτερα την κατασκευή Ψηφιακών Μοντέλων Αναγλύφου (Digital Terrain Models) με διατήρηση του κλασματικού χαρακτήρα. Ακόμα, μια από τις πιο βασικές δραστηριότητες της χαρτογραφικής διαδικασίας, η γενίκευση χαρτών, διευκολύνεται με τη δημιουργία κλασματικών μοντέλων της χαρτογραφικής πληροφορίας /7/.

Οι γεωλόγοι είχαν διαισθητικά αντιληφθεί ότι πολλοί γεωλογικοί σχηματισμοί διέθεταν ανεξαρτησία κλίμακας, γι' αυτό και από παλιά υπήρχε προδιαγραφή οι φωτογραφίες ενός γεωλογικού φαινομένου να συμπεριλαμβάνουν και μια κλίμακα αναφοράς. Σήμερα, πολλά προβλήματα της γεωλογίας και της γεωφυσικής εξετάζονται υπό το πρίσμα της Κλασματικής γεωμετρίας. Οι γεωφυσικοί συγκλίνουν στην άποψη ότι, όχι μόνον οι επιφάνειες θραύσης των ρηγμάτων έχουν κλασματική μορφή, αλλά και ο μηχανισμός θραύσης ενός ρήγματος, που συνοδεύεται με σεισμική δραστηριότητα, έχει κλασματικό χαρακτήρα. Ανάλογη αντίληψη επικρατεί και στις μικρότερες κλίμακες, όπου οι επιφάνειες θραύσης μετάλλων ή βράχων μελετώνται με μεθόδους της Κλασματικής γεωμετρίας για να επιβεβαιωθεί ο κλασματικός τους χαρακτήρας και για να προσδιοριστεί, μέσω της κλασματικής διάστασής τους, ένα μέτρο της τραχύτητας των επιφανειών /6/, /8/.

Μια πιθανή εξήγηση του ρόλου των κλασματικών συνόλων στην γεωδυναμική, μπορεί ν' αναζητηθεί στα θεωρήματα ορίου των πιθανοτήτων. Για παράδειγμα η γραμμική κίνηση Brown B(t), είναι ο οριακός ελκυστής του συνόλου των τυχαίων διαδικασιών που διαθέτουν ανεξαρτησία κλίμακας και κείνται στη «λεκάνη έλξης» της διαδικασίας αυτής. Με άλλα λόγια, το γράφημα της συνάρτησης, είναι ένα αυτο-ομοπαράλληλο κλασματικό σύνολο. Αλλά και οι κατακόρυφες τομές (προφίλ) του τοπογραφικού αναγλύφου, των επιφανειών θραύσης βράχων ή μετάλλων ή και των ρηγμάτων, δείχνουν να συμπεριφέρονται σαν τυχαία αυτο-ομοπαράλληλα κλασματικά σύνολα.

Μια άλλη εξήγηση του ρόλου των fractals στην γεωφυσική, μπορεί να προέρχεται από τα ντετερμινιστικά χαοτικά δυναμικά συστήματα. Κάτω από αυτό το σκεπτικό εξετάζεται η δυναμική διαδικασία της σεισμικής δραστηριότητας, η οποία φαίνεται να παρουσιάζει κλασματική συμπεριφορά ως προς τον τρόπο που εκδηλώνεται στον χώρο. Παράλληλα, όμως, διαφαίνεται και μια διαλείπουσα εκδήλωση των σεισμών με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή παρατηρείται και μια ανεξαρτησία κλίμακας στον χρόνο.

Μοντέλα, που επιχειρούν να προτυποποιήσουν αυτή τη συμπεριφορά της σεισμικής ακολουθίας, προϋποθέτουν ανοιχτά φυσικά συστήματα, τα οποία **αυτο-οργανώνονται σε κρίσιμες οριακές καταστάσεις** (open systems of self-organized criticality), έτσι ώστε η παραμικρή εξωτερική διατάραξη να έχει σαν συνέπεια την ενεργοποίηση της διαδικασίας που οδηγεί στη σεισμική δραστηριότητα. Στη συνέχεια, το σύστημα ισορροπεί και πάλι σε κάποια, νέας ενεργειακής στάθμης, κρίσιμη κατάσταση, μέχρις ότου η διαδικασία ενεργοποιηθεί εκ νέου. Τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται από την βασική ιδιότητα της **ανάδρασης** (επανάληψης) που διαθέτουν τα ανοιχτά φυσικά συστήματα και, βέβαια, αποτελούν απλοϊκές προσεγγίσεις της πολύπλοκης πραγματικότητας.

Η Κλασματική γεωμετρία του Benoit Mandelbrot αποτελεί μια νέα μεθοδολογία για την προσέγγιση της φύσης, όπου η έρευνα βρίσκεται ακόμα στο ξεκίνημά της. Σίγουρο είναι ότι στο άμεσο μέλλον η Κλασματική γεωμετρία θα συνεχίσει να διευρύνει τους ορίζοντες της γνώσης μας και να συνεισφέρει στην καλύτερη κατανόησή μας, για το πώς η φύση συνδυάζει με τόσο αρμονικό τρόπο την τάξη και το χάος, έτσι ώστε ν' αποτελούν αναπόσπαστα στοιχεία της ίδιας της εξέλιξης του σύμπαντος.

3. Βιβλιογραφία

1. Peitgen H.O., Saupe D. (eds): *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1988.
2. Mandelbort B.B.: *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., N. York, 1982.
3. Devaney R.L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Second Edition, Addison-Wesley Publ. Co., 1989.
4. Barnsley M.: *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
5. Feder J.: *Fractals*, Plenum Press, 1988.
6. Scholz C.H., Mandelbrot B.B. (eds): *Fractals in Geophysics*, Birkhauser, 1989.
7. Νάκος Β.: *Ψηφιακή Απεικόνιση Χαρτογραφικών Φαινομένων Βασισμένη στην Θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας*, Διδακτορική Διατριβή, ΤΑΤΜ-ΕΜΠ, Αθήνα, 1990.
8. Sakellariou M., Nakos B., Mitsakaki C.: *On the Fractal Character of Rock Surfaces*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr., Vol 28, No 6, 1991.
9. Gleick J.: *Χάος. Μια Νέα Επιστήμη*, Εκδόσεις Τροχαλία, 1988.
10. Briggs J., Peat D.F.: *Ο Ταραγμένος Καθρέφτης*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1991.
11. Stewart I.: *Παίζει ο Θεός Ζάρια;* Εκδόσεις Κωσταράκη, 1991.